55. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2013/2014

Riešenie úloh krajského kola kategórie C
(ďalšie informácie na http://fo.uniza.sk a www.olympiady.sk)

1. Námorná hliadka

a) Náčrt situácie. 1b

b) Ide o šikmý vrh nahor. Časovú závislosť súradníc trajektórie vyjadrujú rovnice

$$x = v_0\, t \cos\alpha \qquad (1) \qquad 1b$$

$$y = v_0\, t \sin\alpha - \frac{1}{2} g\, t^2 . \qquad (2) \qquad 1b$$

c) Pre bod dopadu strely na hladinu mora platí: $x_D = d$, $y_D = 0$.
Po dosadení do rovníc (1) a (2) máme

$$t_D = \frac{2v_0}{g} \sin\alpha \qquad (3)$$

$$d = \frac{2v_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha . \qquad (4) \qquad 2b$$

Maximálny dostrel zodpovedá maximálnej hodnote $\sin 2\alpha_m = 1$, tzn. $\alpha_m = 45°$. Pre tento uhol výstrelu

$d_m = \frac{v_0^2}{g}$. Pre dané hodnoty veličín $d_m \approx 65$ km. 1b

d) Zo vzťahu (4) máme

$\alpha = \frac{1}{2} \arcsin \frac{g\, d}{v_0^2}$. Pre $d < d_m$ existujú dve riešenia $0 < \alpha_1 < 45°$ a $\alpha_2 = 90° - \alpha_1$.

Pre dané hodnoty veličín $\alpha_1 \approx 5{,}3°$. 2b

e) Za čas t_D letu strely prejde ponorka vzdialenosť $x = v_P\, t_D$.
Mieriť je potrebné pred ponorku do vzdialenosti x. Uhlová odchýlka φ trajektórie strely je daná vzťahom

$$tg\,\varphi = \frac{x}{d} = \frac{v_P\, t_D}{d} = \frac{v_P}{d} \frac{2v_0}{g} \sin\alpha_1 .$$

Pre dané hodnoty veličín $\mathrm{tg}\varphi \approx 1{,}9\times10^{-2}$, resp. $\varphi \approx 1{,}1° \approx 1°\ 7'$. 2b

Pozn.: Rýchlosť v_P = 30 kt = 55,6 km/h ≈ 15,4 m/s.

2. Plávanie dosky

a) Celková tiažová sila pôsobiaca na sústavu má veľkosť

$$F_g = (M + m)\, g$$

Ak je ponorená iba časť dosky s objemom $V < M / \rho_B$, vztlaková sila pôsobiaca na sústavu doska–kameň má veľkosť

$$F_v = \left(V + \frac{m}{\rho_K} \right) \rho_V\, g\,.$$

Z podmienky rovnováhy síl $F_g = F_v$ určíme objem V

$$V = \frac{M}{\rho_V} + m \left(\frac{1}{\rho_V} - \frac{1}{\rho_K} \right). \qquad (1) \qquad 1b$$

Hraničnú hmotnosť kameňa m_m, pri ktorej sa celá doska ponorí, určíme z podmienky

$$V = \frac{M}{\rho_B}\,.$$

Odtiaľ máme

$$m_m = M \; \frac{\rho_V - \rho_B}{\rho_K - \rho_V} \; \frac{\rho_K}{\rho_B}$$, pre dané hodnoty veličín $m_m \approx 21{,}5$ kg. 1b

Pre $m < m_m$ objem ponorenej časti dosky je daný vzťahom (1) a sila, ktorá napína lanko

$$F_L = m\, g \left(1 - \frac{\rho_V}{\rho_K} \right) \qquad (2) \qquad 1b$$

Pomocou (1) a (2) určíme

pre hmotnosť m_1: $V_1 \approx 19\ \text{dm}^3$ a $F_{L1} \approx 38$ N,

pre hmotnosť m_2: $V_2 \approx 23\ \text{dm}^3$ a $F_{L2} \approx 76$ N. 2b

A je hmotnosť kameňa $m > m_m$, čo je v prípade m_3, $F_g > F_V$, sústava ku dnu.

Keďže $L + l < h$, celá doska sa ponorí pod hladinu vody. Vypočítame objem V_3 ponorenej časti dosky a ťahovú silu F_{L3} v lanku v tomto prípade.

Objem ponorenej časti dosky je rovný objemu V_B celej dosky

$$V = V_B = \frac{M}{\rho_B}\,.$$

V tomto prípade je sila F_{L3} napínajúca lanko rovná rozdielu veľkosti vztlakovej sily pôsobiacej na dosku F_v a tiažovej sily F_{g1} pôsobiacej na dosku

$$F_{L3} = F_{v1} - F_{g1} = \frac{M}{\rho_B} \rho_V\, g - M\, g = M\, g \left(\frac{\rho_V}{\rho_B} - 1 \right), \qquad \text{pre } m > m_m.$$

Pre dané hodnoty veličín a $m = m_3$ máme $V_3 \approx 29\ \text{dm}^3$ a $F_{L3} \approx 136$ N. 2b

b) Predpokladajme, že nastala situácia opísaná v texte b) (doska sa nachádza v polohe, v ktorej čiastočne vyčnieva nad hladinu a s rovinou hladiny zviera uhol α). Ak je v tejto polohe v pokoji vzhľadom na bazén i vodu v ňom, musí byť splnená podmienka nulovej hodnoty momentov všetkých síl pôsobiacich na dosku. Ak označíme S obsah prierezu dosky, je dĺžka x ponorenej časti dosky podľa (1)

$$x = \frac{V}{S} = \frac{M}{S\,\rho_V} + \frac{m}{S}\left(\frac{1}{\rho_V} - \frac{1}{\rho_K}\right). \qquad (2)$$

Na dosku pôsobí tiažová sila $F_{g1} = M\,g$, pričom jej pôsobisko je v ťažisku (strede) dosky vo vzdialenosti $L/2$ od jej zaťaženého konca.

Na dosku pôsobí ďalej vztlaková sila $F_{vD} = V\,\rho_V\,g = S\,x\,\rho_V\,g$, pričom jej pôsobisko je v ťažisku ponorenej časti vo vzdialenosti $x/2$ od zaťaženého konca.

Moment síl pôsobiacich na sústavu vzhľadom na vodorovnú os kolmú na dosku a prechádzajúcu zaťaženým koncom dosky

$$M = F_{g1}\,\frac{L}{2}\cos\alpha - F_{vD}\,\frac{x}{2}\cos\alpha = 0\,. \qquad (3)$$

Z podmienky (3) máme $\qquad M\;L = S\,\rho_V\;x^2\,.$

Tento vzťah platí všeobecne pre ľubovoľný uhol α.

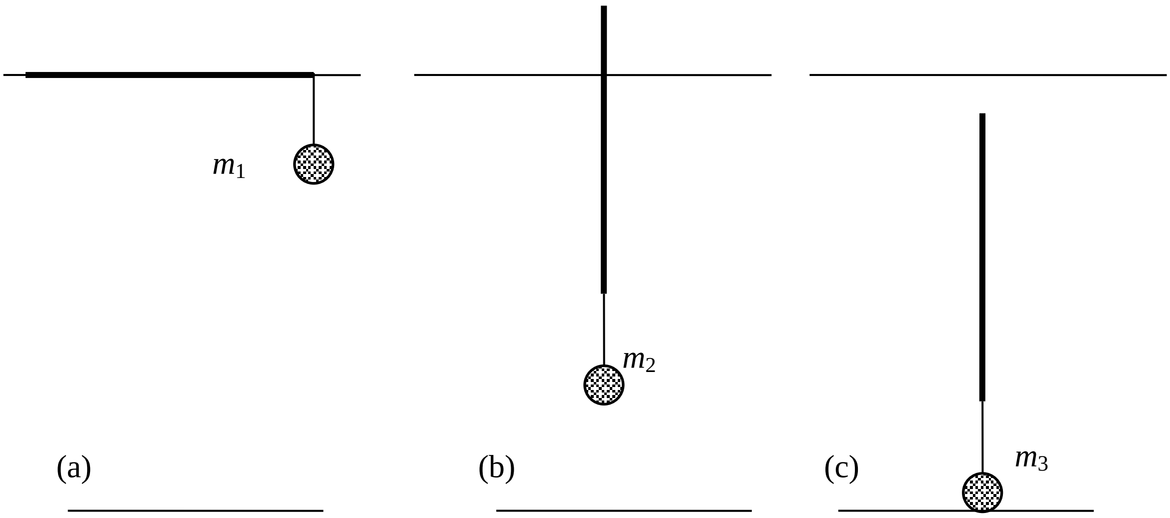
Po dosadení hodnoty x do vzťahu (2) určíme zodpovedajúcu kritickú hmotnosť m_k kameňa $\quad m_k = M\,\dfrac{\rho_K}{\rho_K - \rho_V}\left(\sqrt{\dfrac{\rho_V}{\rho_B}} - 1\right)$. Pre dané hodnoty $m_k \approx 9{,}0$ kg. 2b

Ak je hmotnosť kameňa $m > m_k$, dĺžka x ponorenej časti dosky sa zväčší a podľa vzťahu (3) je $M < 0$, uhol α sa začne zväčšovať až kým nedosiahne hodnotu $\alpha_1 = 90°$, pri ktorej nadobudne moment sily nulovú hodnotu a doska sa bude nachádzať v rovnovážnej polohe kolmo na hladinu vody.

Pri hmotnosti kameňa $m < m_k$ je podľa (3) $M > 0$, čo znamená, že uhol α sa bude zmenšovať a doska sa „položí“ na hladinu, čím zaujme takmer vodorovnú rovnovážnu polohu.

Pozn.: Voči nezaťaženej doske, ktorá by bola vodorovná, je zaťažený koniec nižšie ako druhý voľný koniec, pre to doska nie je celkom vodorovná. Ak však predpokladáme, že jej hrúbka $t << L$, odchýlka od vodorovnej polohy je zanedbateľne malá.

c) Obrázky. 1b



Obr. RC–1

3. Odporový teplomer

a) Dvojice rezistorov s odpormi R_1, R_2 a R_3, R_T predstavujú deliče napätia. Napätie medzi uzlami A a B za predpokladu, že prúd voltmetra je nulový, je

$$U_V = U_0 \left(\frac{R_T}{R_T + R_3} - \frac{R_2}{R_2 + R_1} \right) = U_0 \, \frac{R_T R_1 - R_2 \, R_3}{(R_T + R_3)(R_2 + R_1)} . \qquad (1) \qquad 2b$$

V stave vyváženia pri teplote t_0 $U_{V0} = 0$. Potom z (1) máme

$$R_{T0} R_1 = R_2 \, R_3 . \qquad (2)$$

Na vyváženie je potrebné nastaviť odpor

$R_3 = \dfrac{R_{T0} R_1}{R_2}$. Pre dané hodnoty veličín R_3 = 1,0 kΩ. 1b

b) Teplotná závislosť odporu senzora je daná funkciou

$$R_T = R_{T0} \left[1 + \alpha (t - t_0) \right] . \qquad 1b$$

Napätie na voltmetri vo vyváženom môstiku (vzťah (2))

$$\begin{aligned} U_V &= U_0 \, \frac{R_{T0} R_1 \left[1 + \alpha (t - t_0) \right] - R_2 \, R_3}{\left(R_{T0} \left[1 + \alpha (t - t_0) \right] + R_3 \right) (R_2 + R_1)} = \\ &= U_0 \, \frac{R_{T0} R_1 \, \alpha (t - t_0)}{\left(R_{T0} + R_3 + R_{T0} \, \alpha (t - t_0) \right) (R_2 + R_1)} \end{aligned} . \qquad (3) \qquad 2b$$

V teplotnom intervale (0 ÷ 40) °C je $\alpha (t - t_0) << 1$ a vzťah (3) pre napätie U_V má približnú hodnotu

$$U_V \approx U_0 \, \frac{R_{T0} R_1}{(R_{T0} + R_3)(R_2 + R_1)} \, \alpha (t - t_0) . \qquad 2b$$

V úzkom teplotnom intervale je závislosť lineárna.

Koeficient citlivosti teplomera

$$k = \frac{U_V}{(t - t_0)} = \alpha U_0 \frac{R_{T0} R_1}{(R_{T0} + R_3)(R_2 + R_1)}.$$

Pre dané hodnoty veličín $k \approx 1{,}9$ mV/°C. 2b

4. *Zohrievanie zmesi ľadu a vody*

a) Po zapnutí vyhrievania sa bude pri teplote t_t topenia ľadu najprv roztápať ľad a premieňať na vodu s teplotou $t_t = 0$ °C. Takže bude platiť

$$P\tau_1 = m_{L1} l_L, \qquad (1)$$ 1b

kde $P\tau = Q$ je teplo dodané špirálou za čas τ. Po čase τ_1 je v kalorimetri voda s hmotnosťou $m_{L1} + m_{V1}$ ako na začiatku zohrievania. V tomto prípade platí

$$P = \frac{Q}{\tau} = \frac{(m_{V1} + m_{L1}) c_V (t - t_t)}{\tau} = (m_{V1} + m_{L1}) c_V \alpha, \qquad (2)$$ 2b

kde $(t - t_t) / \tau = \alpha$, ako je uvedené v texte úlohy.

Z rovnice (2) určíme hmotnosť vody po roztopení ľadu

$$m_{V2} = m_{V1} + m_{L1} = \frac{P}{c_V \alpha}. \qquad (3)$$

Pre dané hodnoty veličín $m_{V2} \approx 1{,}0$ kg. 2b

b) Hmotnosť ľadu

$$m_L = \frac{P\tau_1}{l_L}$$

a s použitím výsledku (3) máme

$$p_1 = \frac{m_{L1}}{m_{V1}} = \frac{\tau_1 c_V \alpha}{l_L - \tau_1 c_V \alpha}.$$ Pre dané hodnoty veličín $p_1 \approx 0{,}47$. 2b

c) Pomer objemov

$$p_2 = \frac{V_1 - V_2}{V_1} = \frac{1}{1 + \dfrac{l_L}{\tau_1 c_V \alpha} \dfrac{\rho_L}{\rho_V - \rho_L}}.$$

Pre dané hodnoty $p_2 \approx 3{,}4$ %. 3b

---

55. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy krajského kola kategórie C*

Autori úloh: Ľubomír Konrád (1), Juraj Slabeycius (2), Ivo Čáp (3), Ľubomír Mucha (4)
Recenzia a úprava: Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha
Redakcia: Ivo Čáp
Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava